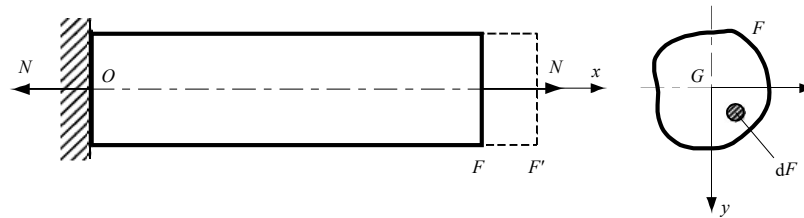


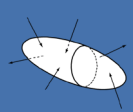
Mécanique des structures



Chapitre 2: Traction ou compression simple

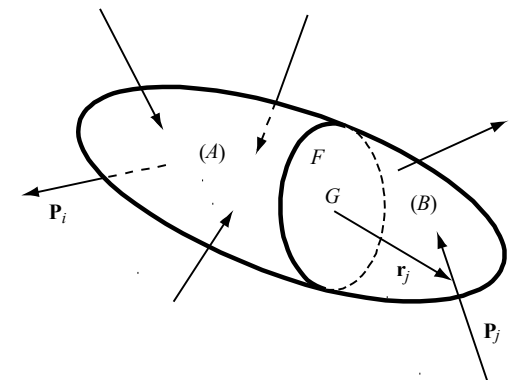
Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Rappel



(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentiel résultantes

(D) Analyse de l'état de contrainte

(E) Énergie de déformation (force & déplacement)



(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentielle résultantes

(D) Analyse de l'état de contrainte

(E) Énergie de déformation (force & déplacement)





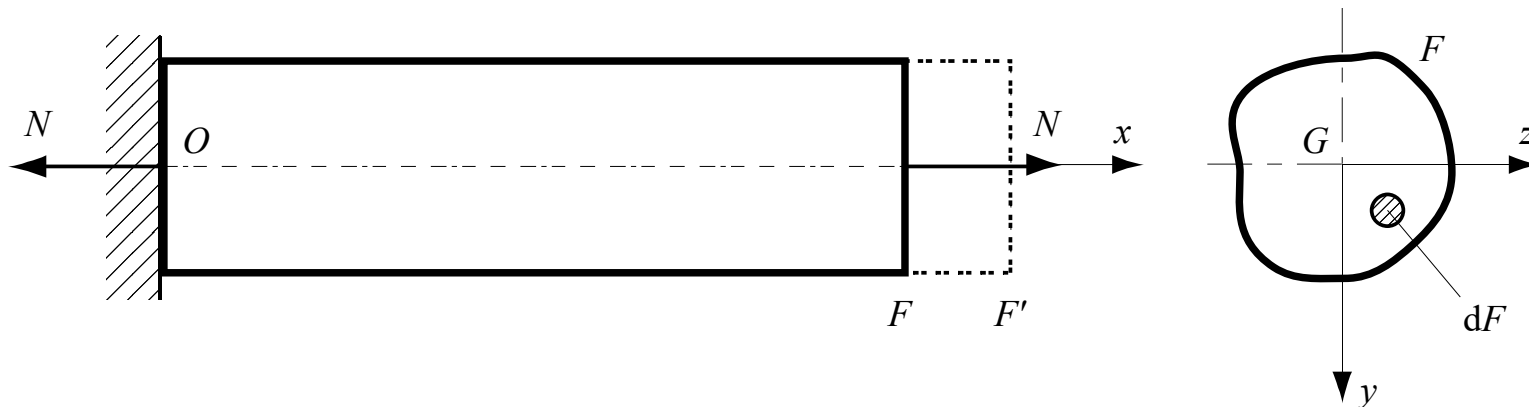
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Définition et notions générales

La section d'un solide travaille en ***traction simple*** quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à une composante N , passant par le centre de gravité de la section et dirigée positivement, selon la convention de signe.

La section travaille en ***compression simple*** quand la force N est négative, c'est-à-dire qu'elle tend à rapprocher les deux parties du solide (ex: bielle de moteur)

Pour une barre de section constante (prismatique), la section F' après déformation se déduit par simple translation de F (***Hypothèse de Bernoulli***) selon l'axe x .



Définition et notions générales

Les **équations d'équilibre** doivent être satisfaites pour l'effort intérieur considéré dans le cas présent, elles sont toutes nulles sauf la première :

(a) $N = \iint_F \sigma \, dF$

(b) $T_y = \iint_F \tau_y \, dF = 0$

(c) $T_z = \iint_F \tau_z \, dF = 0$

(d) $M_t = \iint_F \tau_z \, y - \tau_y \, z \, dF = 0$

(e) $M_{fy} = \iint_F \sigma \, z \, dF = 0$

(f) $M_{fz} = - \iint_F \sigma \, y \, dF = 0$

Le calcul des contraintes intérieures revient à la seule équation non-nulle :

- $N = \iint_F \sigma \, dF = \sigma F$ (pour une section F constante selon l'axe principale x)

Comme σ est constante (indép. y et z), les équations (e) et (f) sont satisfaites car les axes y et z passent par le centre d'inertie de la section.

En vertu de l'hypothèse de Bernoulli, la section F' ne subit aucun déplacement perpendiculaire à Gx , ce qui entraîne $\tau_y = \tau_z = 0$. Les équations (b), (c) et (d) sont par conséquent également satisfaites.

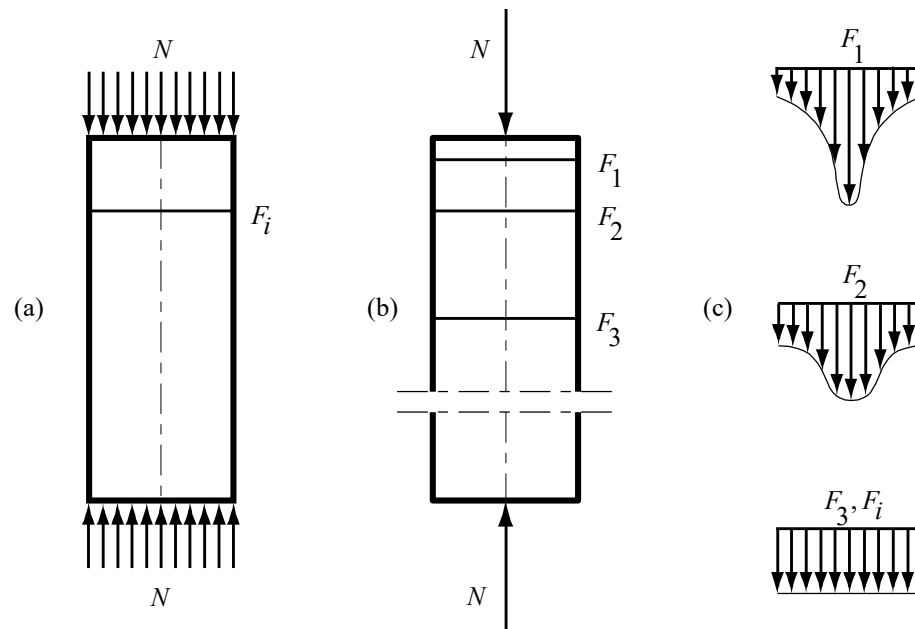


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

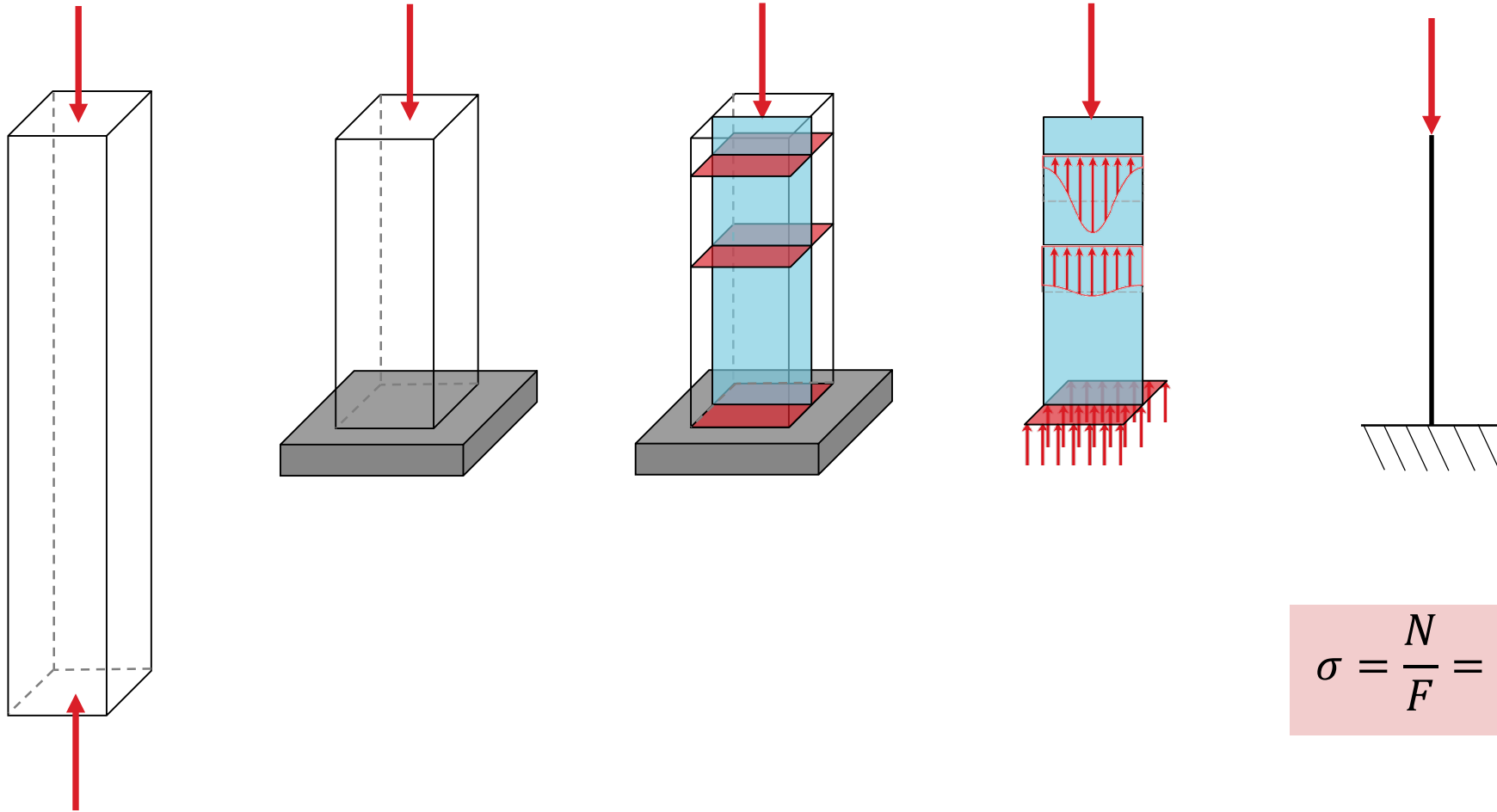
Définition et notions générales

En réalité, la contrainte σ n'est constante dans toute section d'un barreau prismatique que si la force extérieure s'applique uniformément sur les extrémités.

Selon le *principe de St-Venant*, la section doit se trouver à une certaine distance des extrémités pour que l'hypothèse adoptée soit valable dans le cas d'une force concentrée



Dès que la contrainte σ n'est plus constante dans toute la section, il apparaît des contraintes tangentielles τ même si l'effort tranchant $\mathbf{T}$ et le moment de torsion M_t sont nuls.



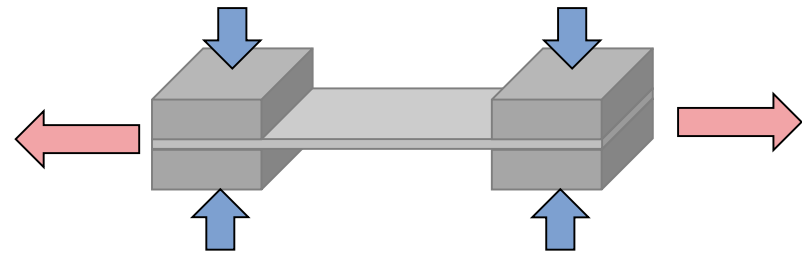
$$\sigma = \frac{N}{F} = \varepsilon E$$

Effet de bord : pertinence de l'ingénieur

- Ce que l'on souhaite tester :



- Pince ou perçage :



- Les conséquences :

- Contraintes de compression supplémentaires
- Pression inhomogène sur l'éprouvette
- Désalignement des axes introduits des moment parasites

- Solution numérique : Quelles problèmes de modélisation vont être rencontrés?



Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Un anneau de cuivre est serti à chaud, sans jeu et sans serrage, sur un anneau d'acier de même largeur B . La température du cuivre est de $\Delta\theta$ plus élevée que celle de l'acier.

Calculer les contraintes dans l'acier et le cuivre, la pression entre les deux anneaux et le raccourcissement relatif de leur rayon commun après refroidissement du cuivre.

$$E_1 = 117 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$E_2 = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

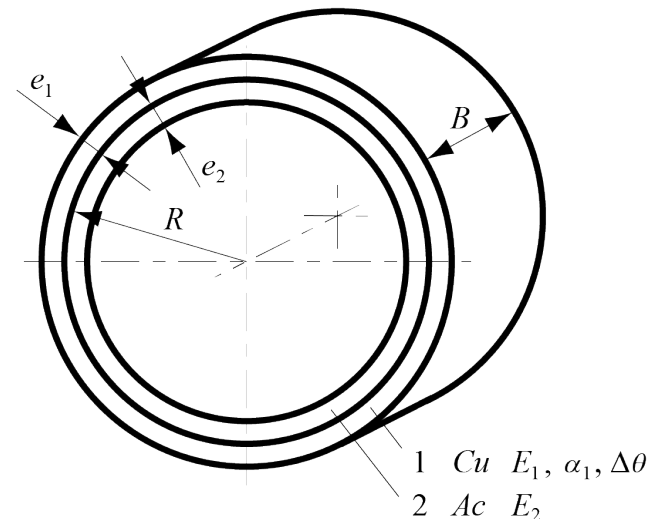
$$e_1 = 0,5 \text{ cm}$$

$$e_2 = 1 \text{ cm}$$

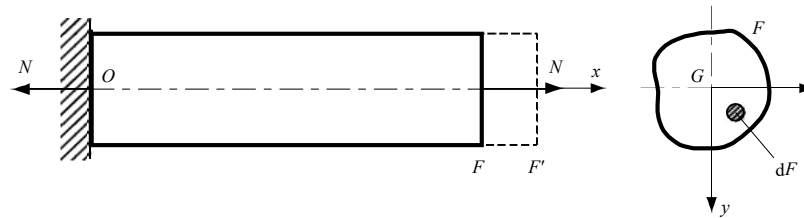
$$R = 10 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 16,6 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$\Delta\theta = 200 ^\circ\text{C}$$



Mécanique des structures



Chapitre 2: Traction ou compression simple

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL





Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre

Un anneau de cuivre est sertie à chaud, sans jeu et sans serrage, sur un anneau d'acier de même largeur B . La température du cuivre est de $\Delta\theta$ plus élevée que celle de l'acier.

Calculer les contraintes dans l'acier et le cuivre, la pression entre les deux anneaux et le raccourcissement relatif de leur rayon commun après refroidissement du cuivre.

$$E_1 = 1,17 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

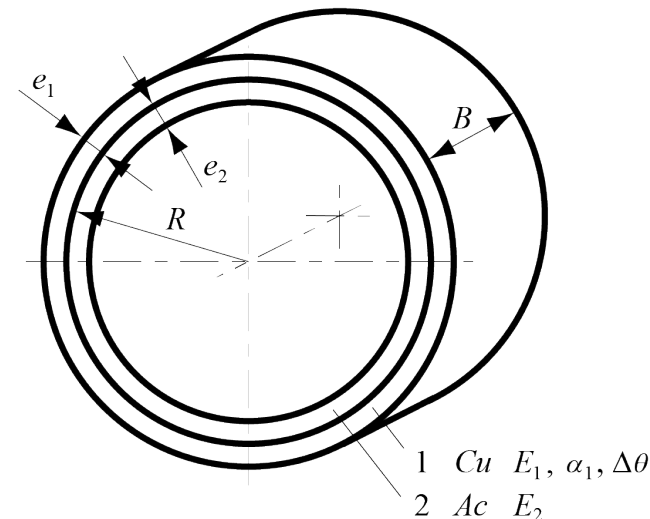
$$e_1 = 0,5 \text{ cm}$$

$$e_2 = 1 \text{ cm}$$

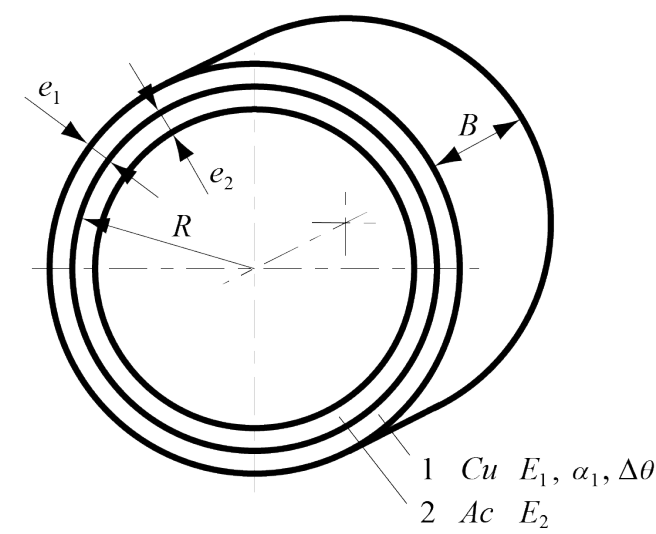
$$R = 10 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 16,6 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

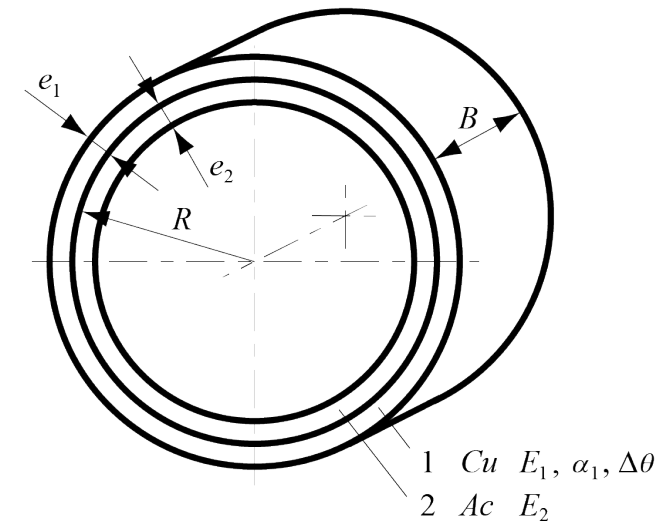
$$\Delta\theta = 200 ^\circ\text{C}$$



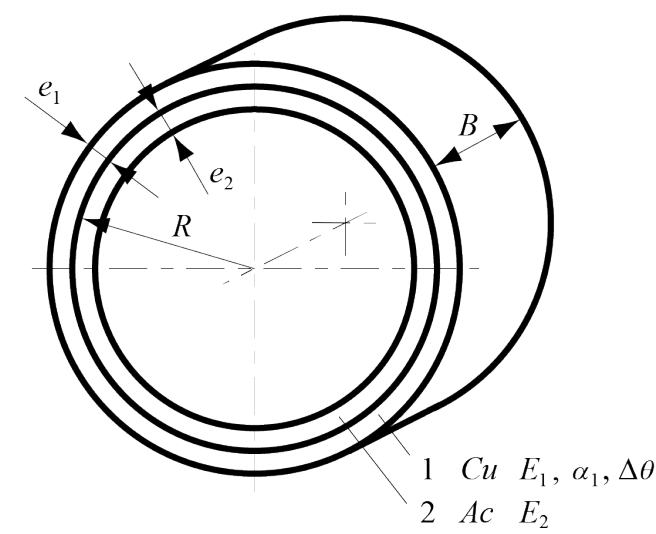
Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre



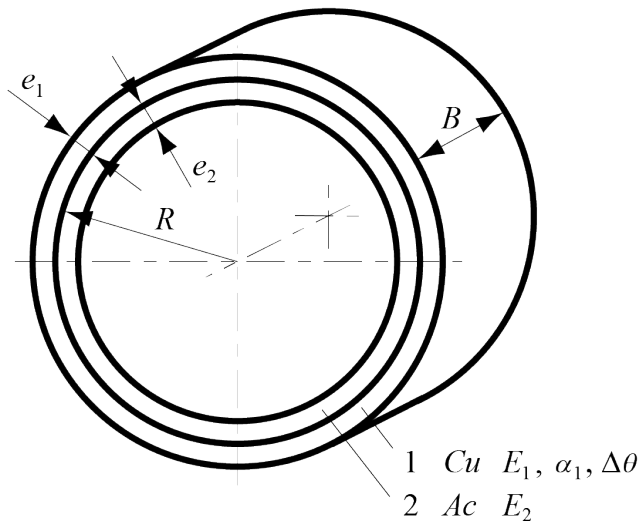
Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre



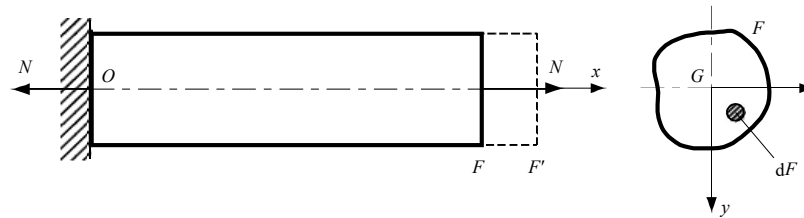
Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre



Problème 2.4 : sertissage à chaud de bague acier-cuivre



Mécanique des structures



Chapitre 2: Traction ou compression simple

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



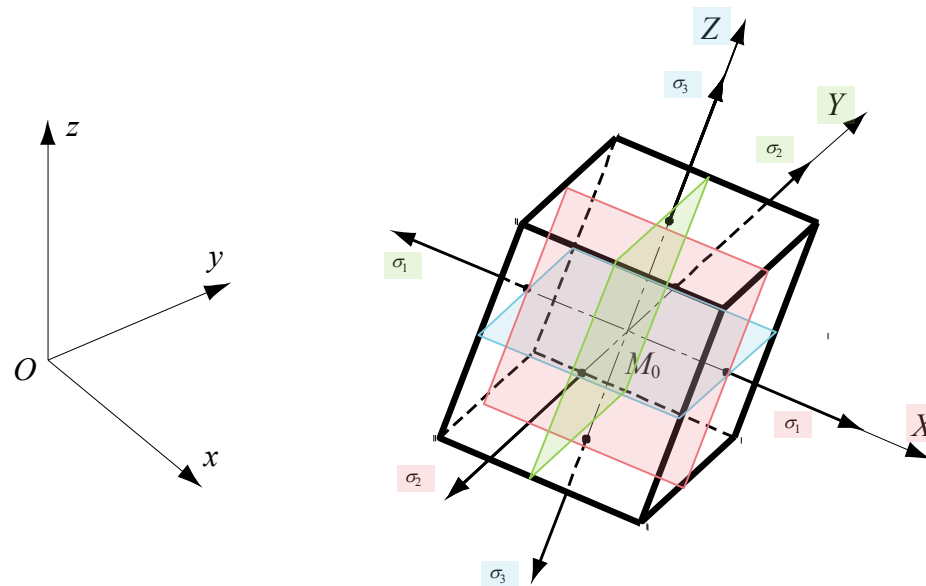


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Un point M_0 quelconque d'un solide, il existe toujours au moins trois plans normaux deux à deux sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles et les contraintes normales extrema :

- les **plans principaux** sont les plans sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles et les contraintes normales extrema
- les **contraintes principales** sont les contraintes normales agissant sur les plans principaux
- les **axes principaux** ou directions principales sont les axes normaux aux plans principaux au point considéré et sont les supports des contraintes principales.



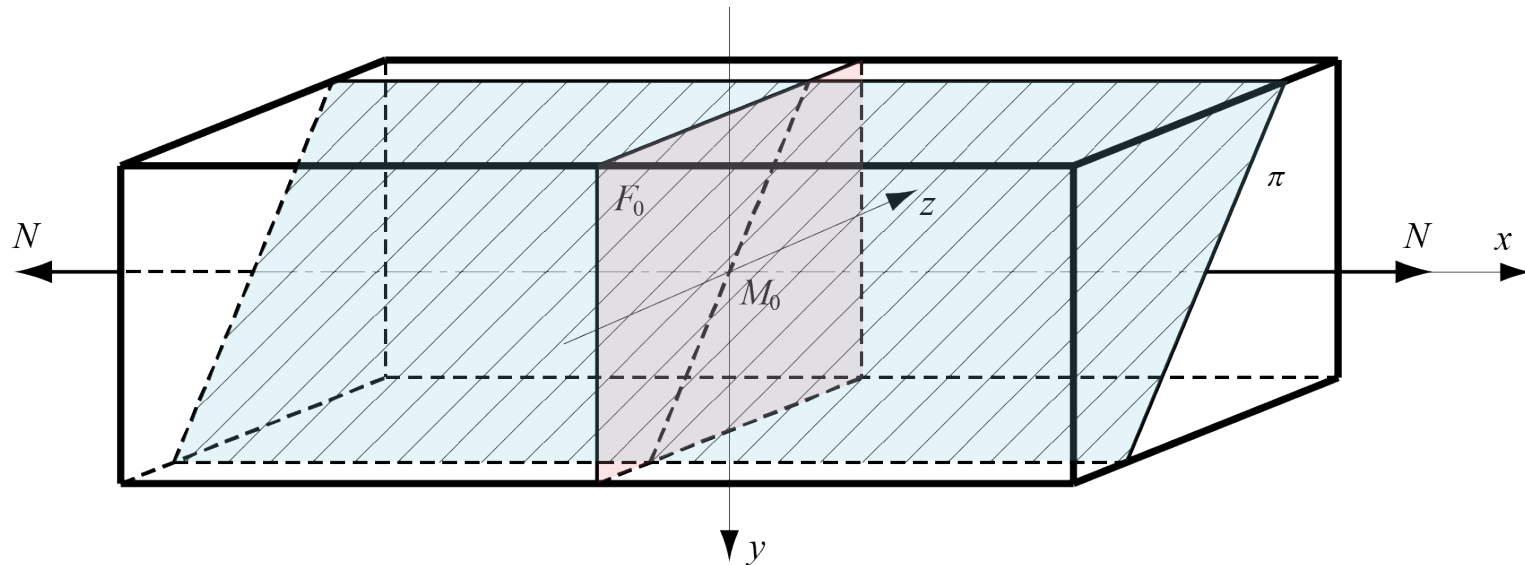


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

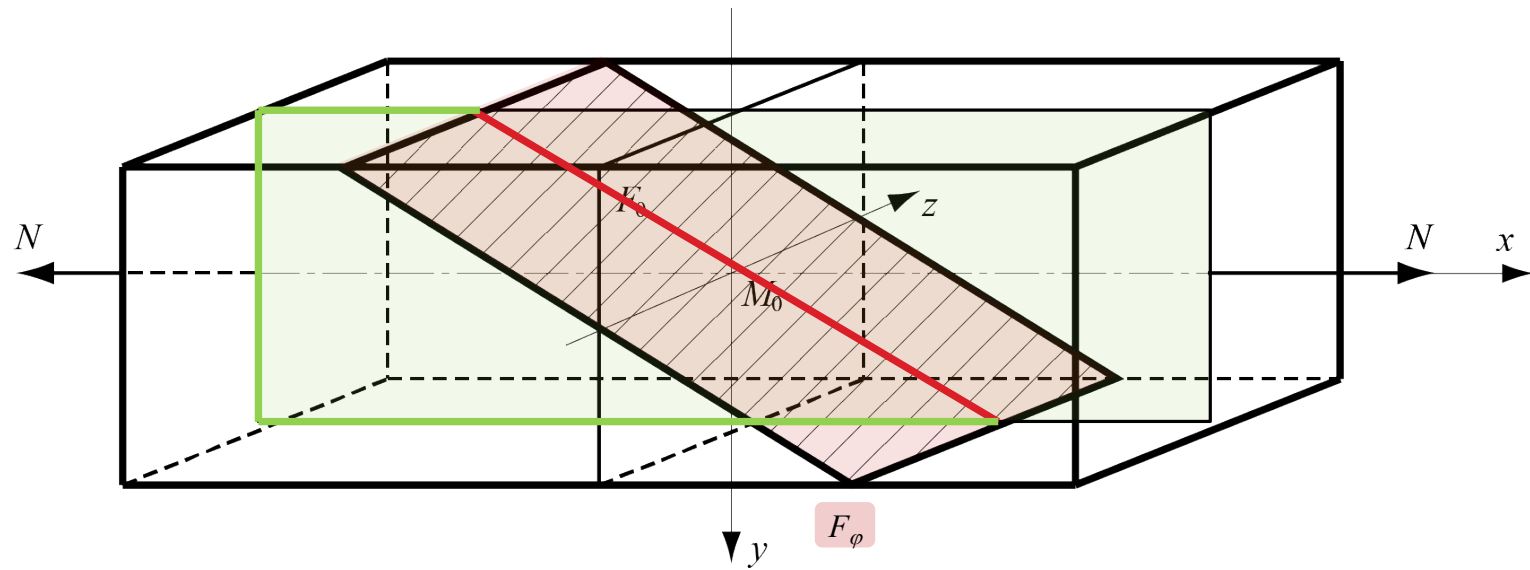
En tout point d'une section droite F_0 d'une poutre soumise à la traction simple, la contrainte normale a pour valeur $\sigma_x = N/F_0$ et la contrainte de cisaillement est nulle. Le plan de F_0 est donc principal et σ_x est une contrainte principale.

Un plan quelconque π passant par l'axe longitudinal de la poutre n'est soumis à aucune sollicitation. La contrainte tangentielle étant nulle.



Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Un plan quelconque π qui passe par le point M_0 et qui tourne autour de l'axe y ou z et soumis simultanément à des sollicitations normale et tangentielle sauf lorsque sa normale forme un angle de 0 ou π avec l'axe principale (contrainte tangentielle nulle) ou un angle de $\pm\pi/2$ (contrainte normale nulle).

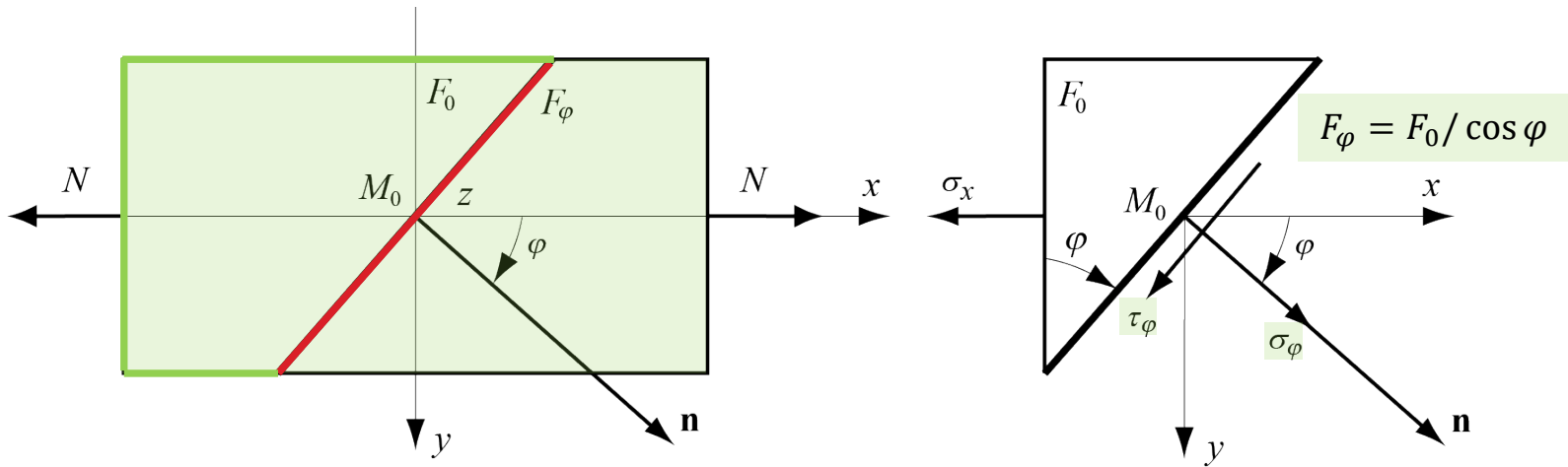




Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

En particulier, les plans M_0xy et M_0xz sont principaux et $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Considérons une section oblique F_j , perpendiculaire au plan principal M_0xy et tournant autour de l'axe M_0z . Sa normale $\mathbf{n}$ fait un angle φ avec l'axe M_0x .



Soient σ_φ et τ_φ les contraintes normales et tangentielles au point M_0 de cette section. Comme les forces agissant sur les faces F_0 et F_φ passent toutes par M_0 , le moment résultant est nul. Les équilibres des forces dans les directions $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_\perp$ s'expriment :

- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_0 \sigma_x \cos \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi + F_0 \sigma_x \sin \varphi = 0$
- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\varphi)$
- $\tau_\varphi = -\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$



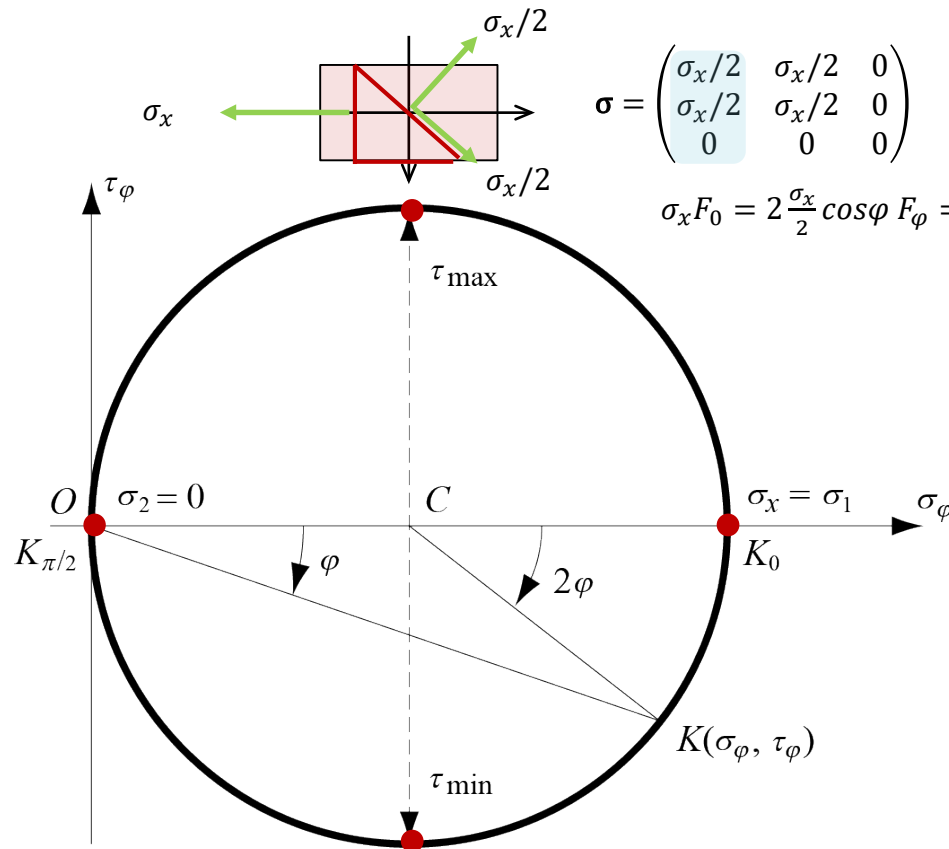
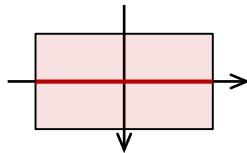
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

On reconnaît les équations paramétriques d'un cercle, appelé *cercle de Mohr*, centré au point $(\sigma_x/2, 0)$ et de rayon $\sigma_x/2$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

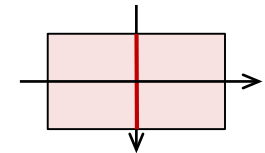
$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



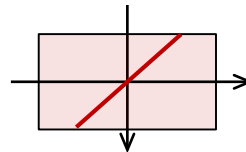
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x F_0 = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_\varphi = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_0 / \cos \varphi = \sigma_x F_0$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



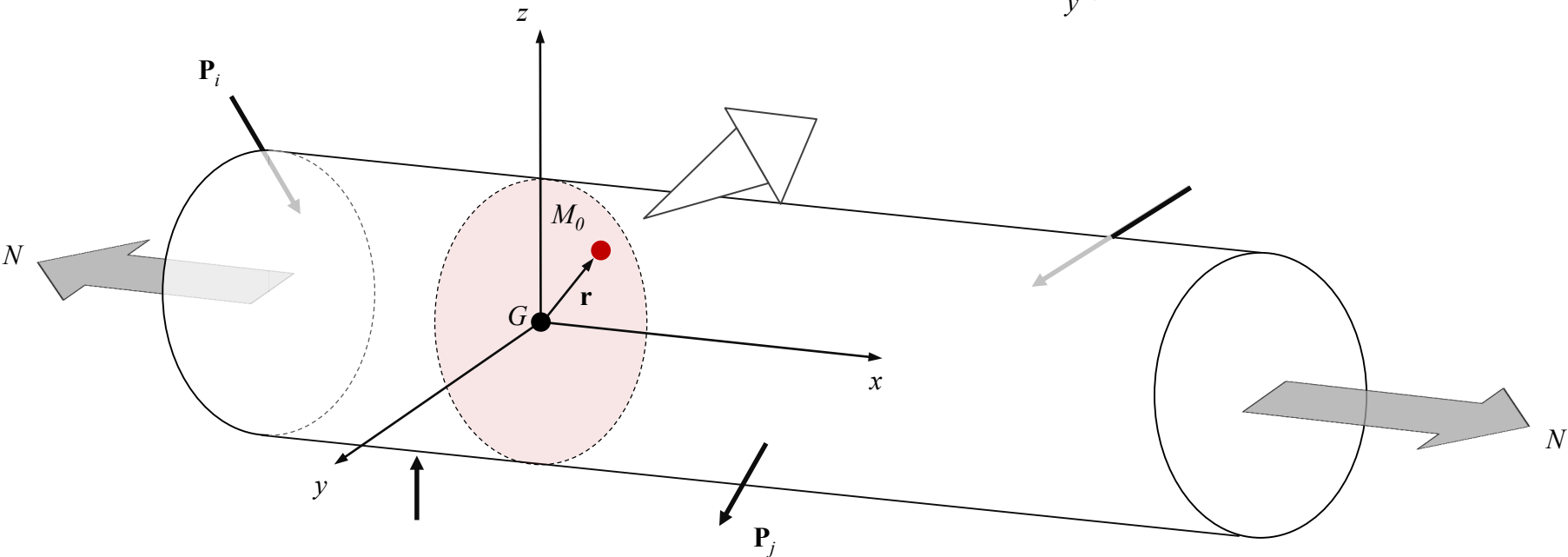
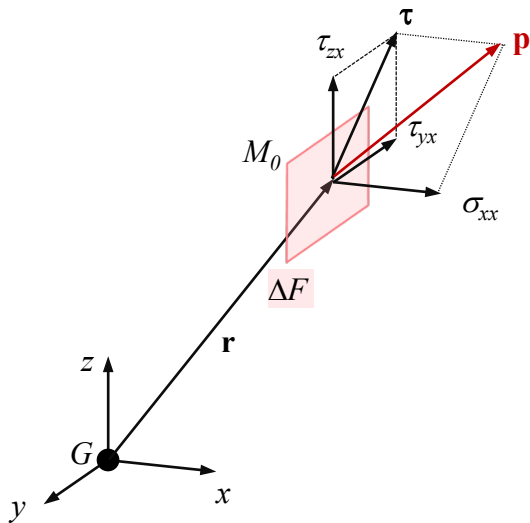
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & -\sigma_x/2 & 0 \\ -\sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

- $\mathbf{p}(M_0) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$
- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_x(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = N/F \\ \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \end{pmatrix}$





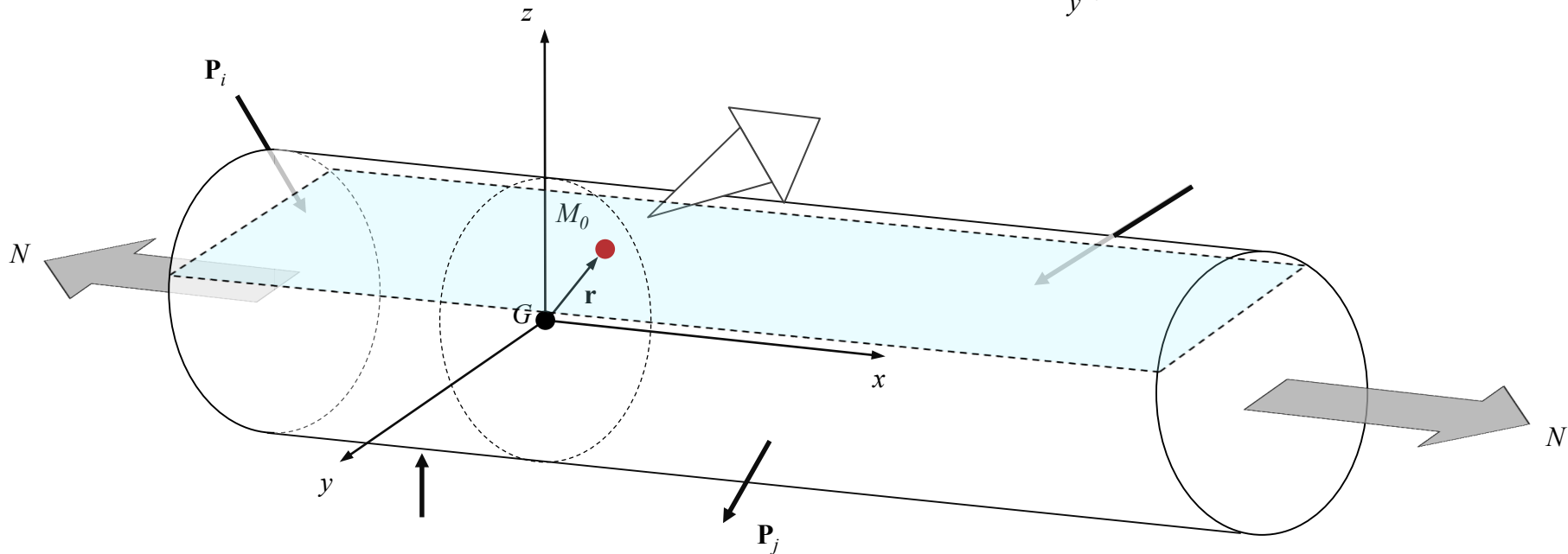
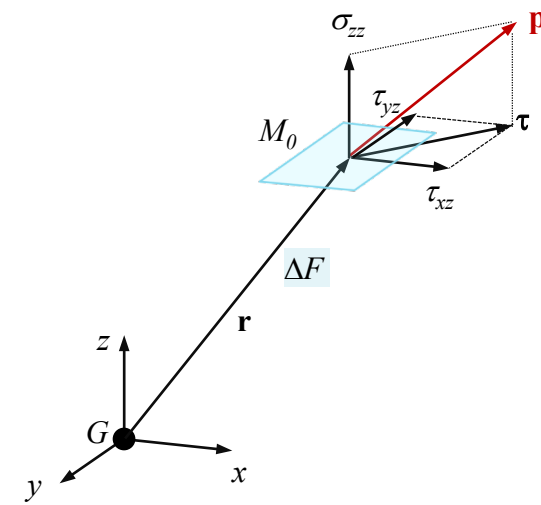
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

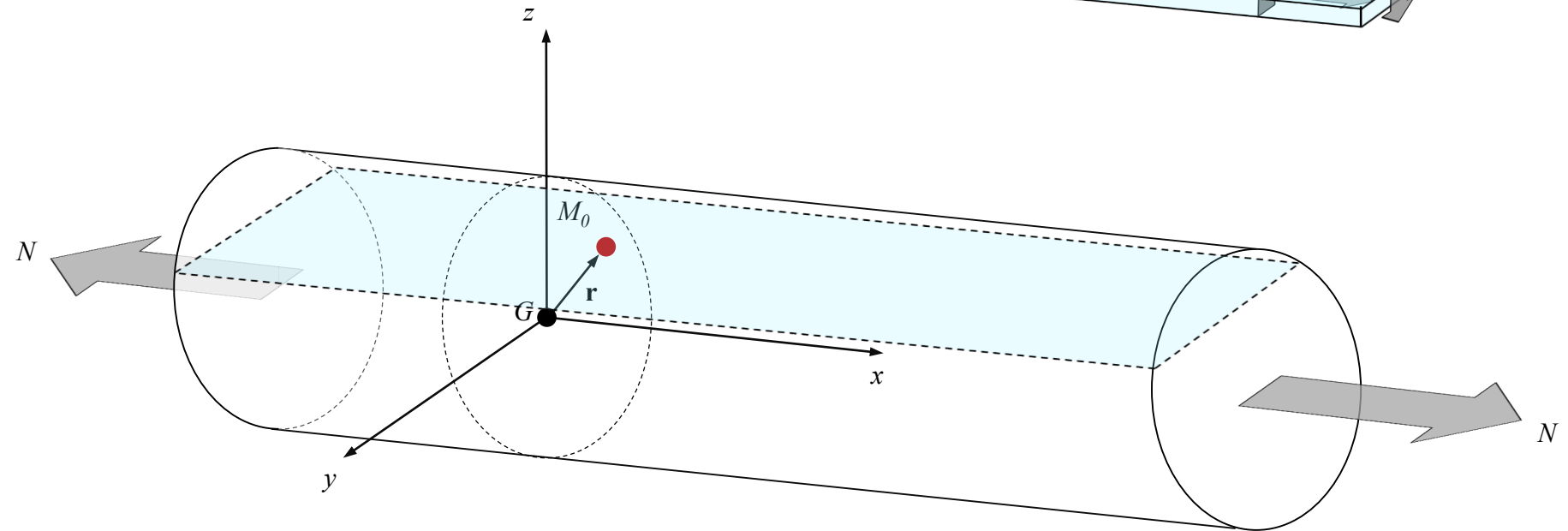
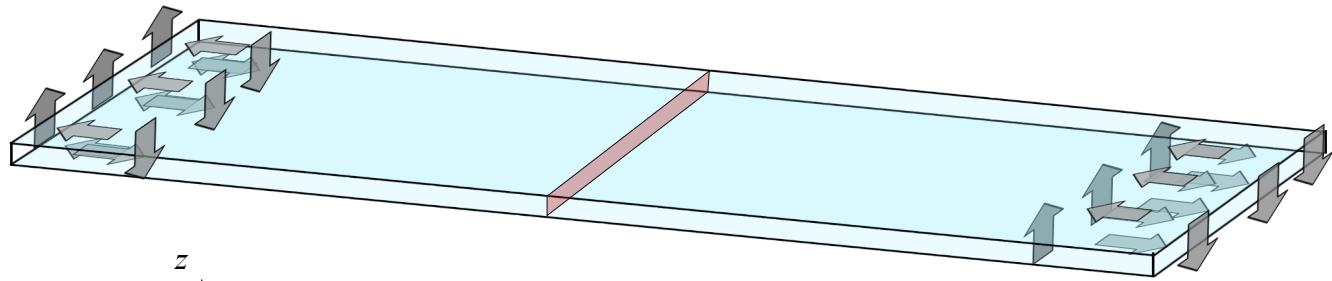
- $\mathbf{p}(M_0) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_x(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{pmatrix}$



Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

- $\tau_{\varphi}(\varphi = 180) = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi = 0$
- $\sigma_{\varphi}(\varphi = 180) = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\varphi) = 0 \quad \leftarrow$ contrainte **normale** au plan



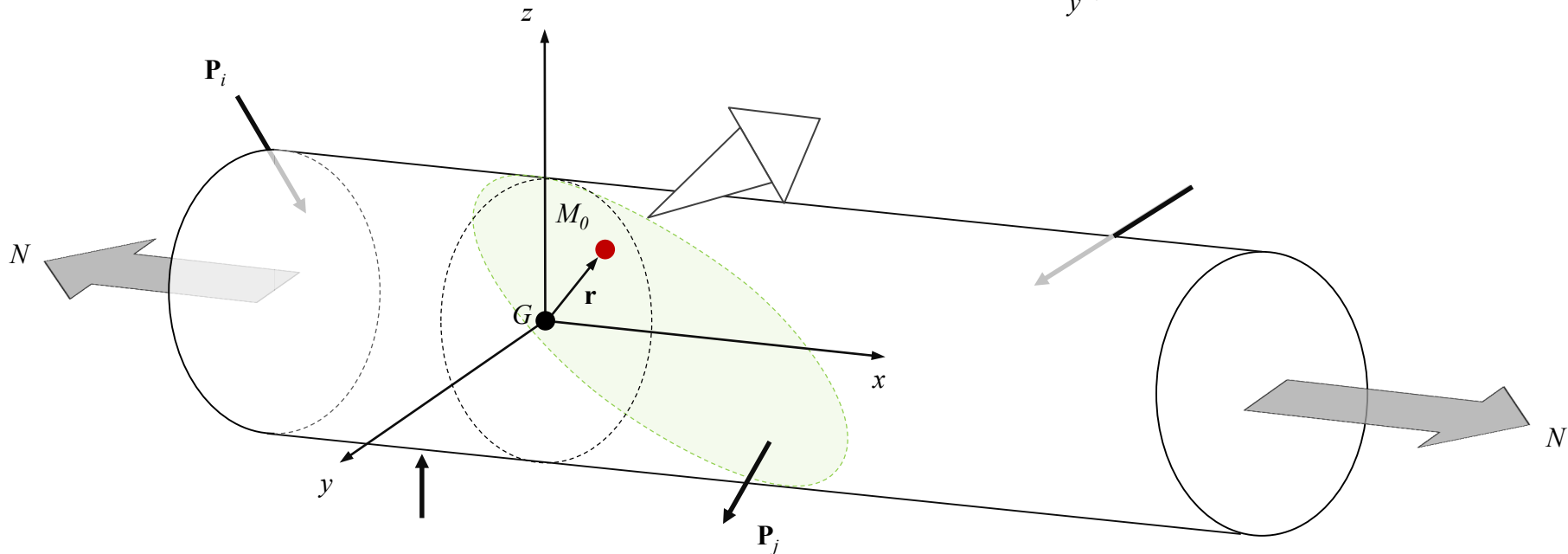
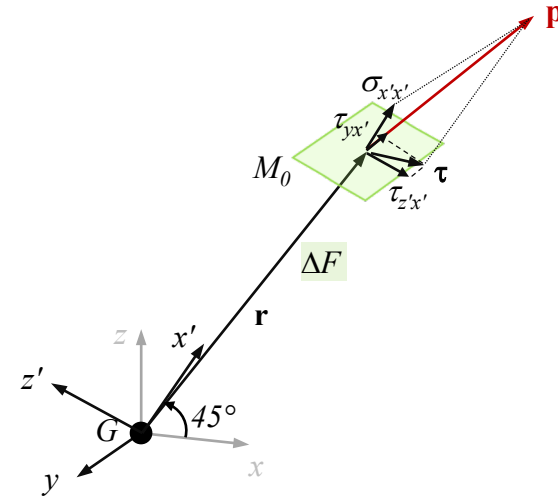


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_{45^\circ}(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}/2 \\ \tau_{yx'} = 0 \\ \tau_{z'x'} = \sigma_{xx}/2 \end{pmatrix}$





Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

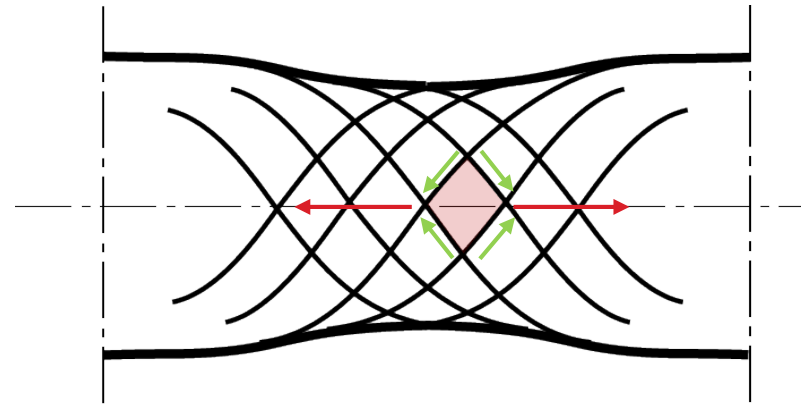
Propriétés du cercle de Mohr :

- Le point du cercle $K(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ représente les contraintes sur la section oblique F_φ .
- La direction OK redonne l'angle φ .
- Aux extrémités $K_0(\sigma_x, 0)$ et $K_{\pi/2}(0, 0)$ du diamètre horizontal, la contrainte tangentielle est nulle et les contraintes normales sont extrema.
- Ces points correspondent à deux plans principaux : ce sont respectivement la section droite F_0 et le plan M_0xz .
- Le cercle est compris entre les contraintes principales :
$$\sigma_1 = \sigma_x \text{ (maxi) et } \sigma_2 = \sigma_y = 0 \text{ (min).}$$
- Le calcul des contraintes dans une section tournant autour de l'axe M_0y (au lieu de M_0z) conduit aussi à un cercle. Son diamètre est compris entre les contraintes principales $\sigma_1 = \sigma_x$ et $\sigma_3 = \sigma_z = 0$. Il est donc identique au cercle précédent.
- Les contraintes sur une section oblique tournant autour de l'axe M_0x (plan π) sont toujours nulles. Le cercle correspondant dégénère en un point centré à l'origine.
- En résumé, l'état de contrainte monodimensionnel peut être décrit par trois cercles de Mohr dont deux sont identiques alors que le troisième est dégénéré.

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Les contraintes de cisaillement maximum $\tau_{\max} = \sigma_x/2$ et minimum $\tau_{\min} = -\sigma_x/2$ apparaissent sur des sections F et F' dont les normales $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ font respectivement un angle de $-\pi/4$ et $\pi/4$ avec l'axe M_0x .

Bien que leur valeur ne soit que la moitié de celle de la contrainte normale σ_x les contraintes de cisaillement maximum $\tau_{\max}$ ou minimum $\tau_{\min}$ peuvent être la cause de l'écoulement plastique de certains matériaux ductiles. (ligne de Lüder)





Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Énergie de déformation

Dans le domaine élastique, l'*énergie de déformation* est rendue par le solide quand la force extérieure revient à sa valeur initiale. (suffisamment lentement pour que les effets dynamiques internes soient négligeables)

L'énergie élastique pour le barreau entier a pour valeur :

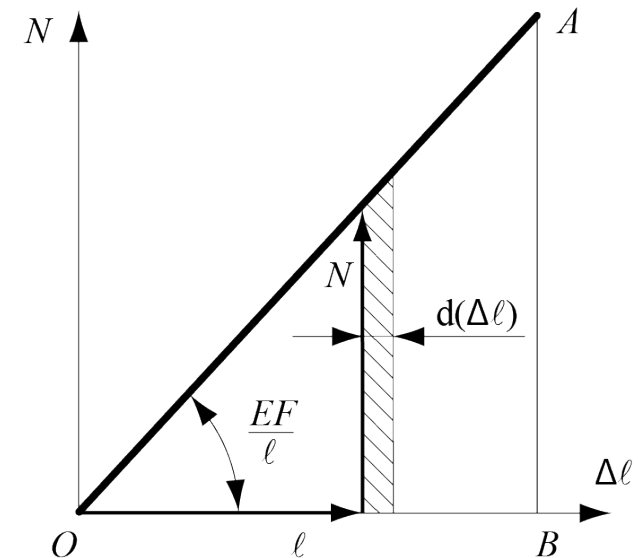
$$\bullet \quad U = \int_0^{\Delta\ell} dU = \int_0^{\Delta\ell} N d(\Delta\ell) = \frac{EF}{\ell} \int_0^{\Delta\ell} \Delta\ell d(\Delta\ell) = \frac{EF(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell} EF \frac{\Delta\ell}{2} = N \frac{\Delta\ell}{2} = \frac{N^2 \ell}{2EF}$$

$\uparrow$
 $dU = N d(\Delta\ell)$

$\uparrow$
 $N = \frac{\Delta\ell EF}{\ell}$

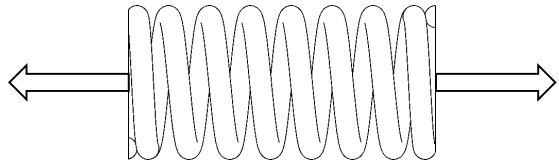
Un calcul identique au précédent permet de trouver les trois formes suivantes de la densité d'énergie :

$$\bullet \quad u = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon \sigma}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$



Analogie entre un ressort et une barre

Ressort



Force

- $N = k x$

Allongement

- $x = \frac{N}{k}$

Rigidité

- $k = \frac{N}{x}$

Energie élastique

- $U = \int_0^{\Delta x} N dx = \int_0^{\Delta x} k x dx = \frac{1}{2} k \Delta x^2$

Barre



Force (Hooke)

- $N = \varepsilon F E = \frac{\Delta \ell F E}{\ell}$

Allongement

- $\Delta \ell = \frac{N \ell}{F E}$

Rigidité

- $k = \frac{N}{\Delta \ell} = \frac{F E}{\ell}$

Energie élastique

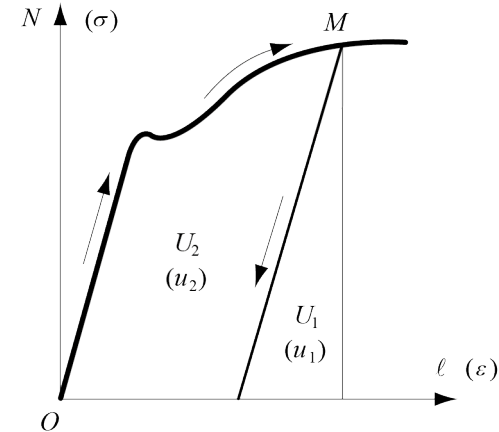
- $U = \int_0^{\Delta \ell} N d(\Delta \ell) = \frac{1}{2} \frac{E F}{\ell} (\Delta \ell)^2$



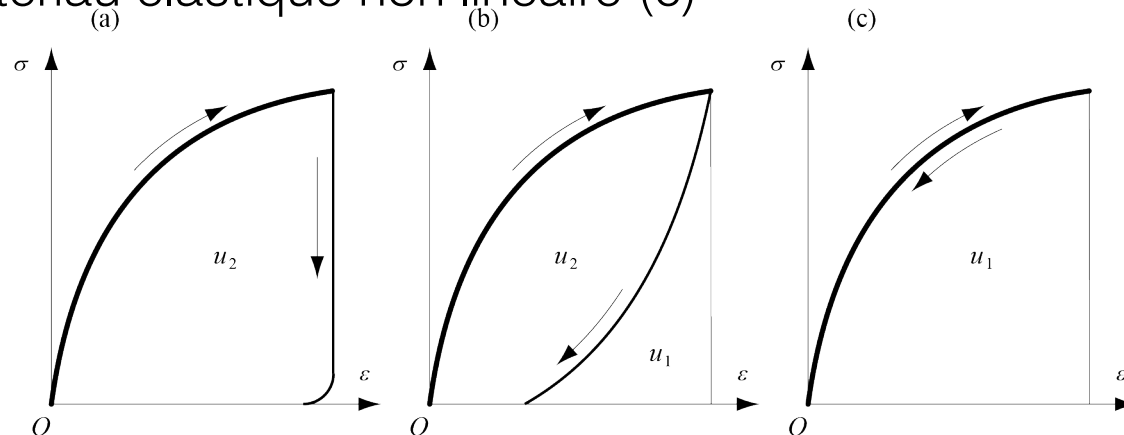
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Énergie de déformation

Dans le domaine plastique, une partie de l'énergie n'est plus restituée à la décharge. Le diagramme de déformation permet de distinguer l'énergie élastique U_1 de l'énergie dite plastique U_2 . L'énergie totale $U = U_1 + U_2$ est égale au travail de la force extérieure lors de la charge.



Densités d'énergie de déformation pour un plastique parfait (a), un plastique ordinaire (b) et un matériau élastique non linéaire (c)

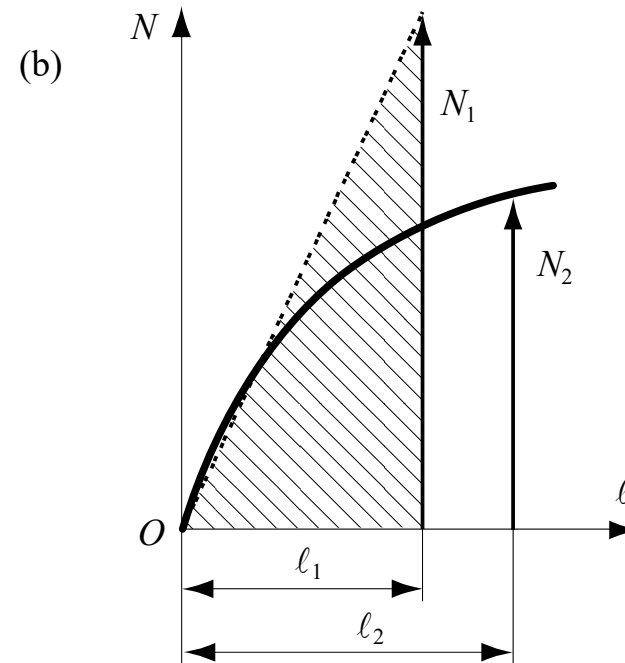
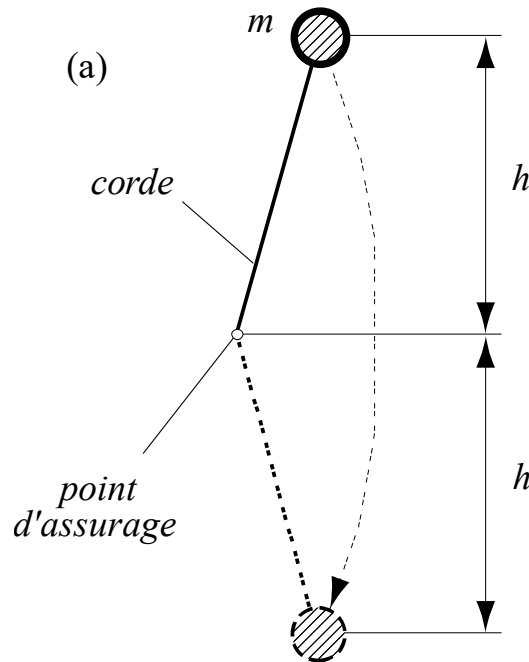




Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Problème 2.5

Calculer la force subie par un alpiniste de masse m tombant d'une hauteur $2h$ et retenu par une corde en nylon de section F .



Masse de l'alpiniste

$$m = 80 \text{ kg}$$

Section de la corde

$$F = 0,5 \text{ cm}^2 (\text{Ø } 8 \text{ mm})$$

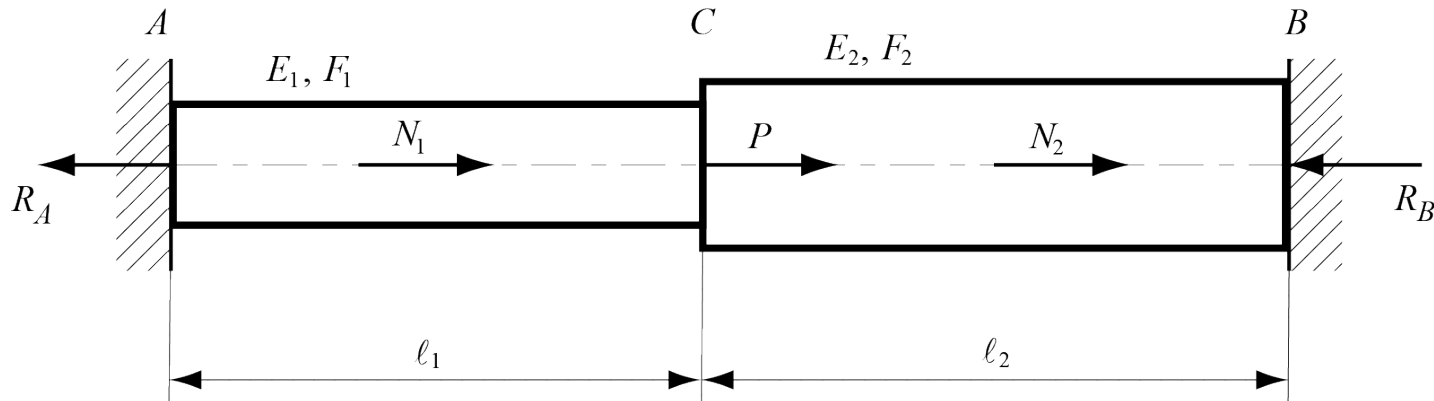
Module d'élasticité du nylon

$$E = 2,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

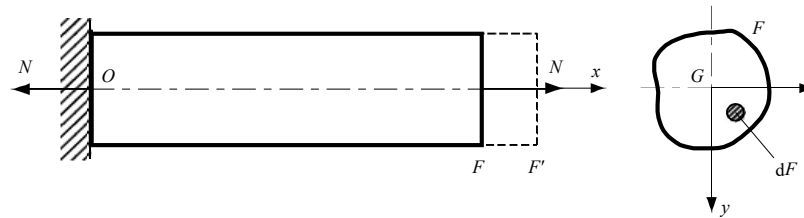
NOTE
Semi-hauteur de chute

$$h = 15 \text{ m}$$

Une force P est appliquée au point C du système représenté. Calculer les efforts intérieurs N_1 et N_2 dans les barres, les réactions en A et B , ainsi que le déplacement δ_C



Mécanique des structures



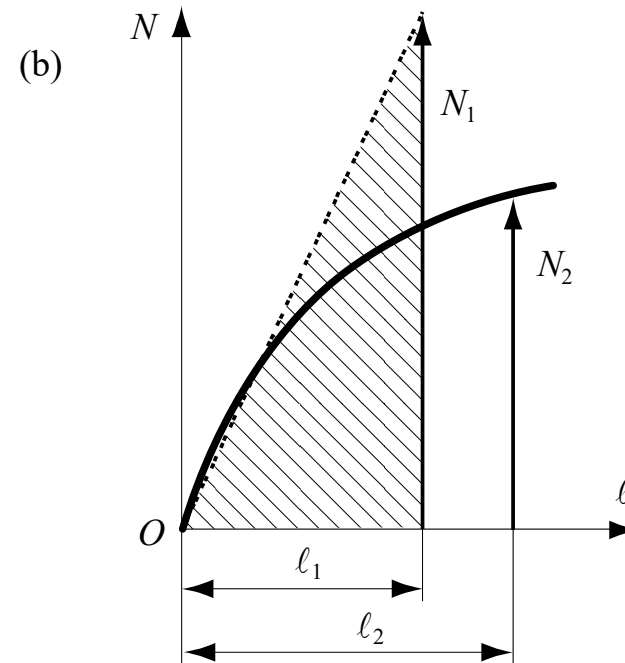
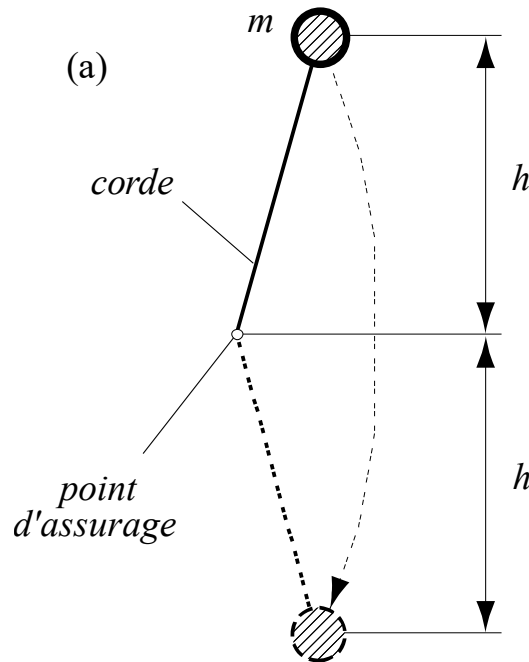
Chapitre 2: Traction ou compression simple

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Calculer la force subie par un alpiniste de masse m tombant d'une hauteur $2h$ et retenu par une corde en nylon de section F .



Masse de l'alpiniste

$$m = 80 \text{ kg}$$

Section de la corde

$$F = 0,5 \text{ cm}^2 (\text{Ø } 8 \text{ mm})$$

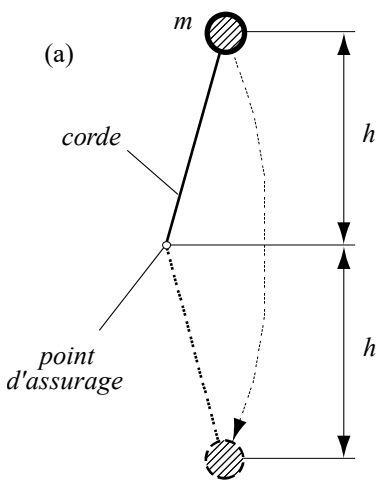
Module d'élasticité du nylon

$$E = 2,8 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

NOTE
Semi-hauteur de chute

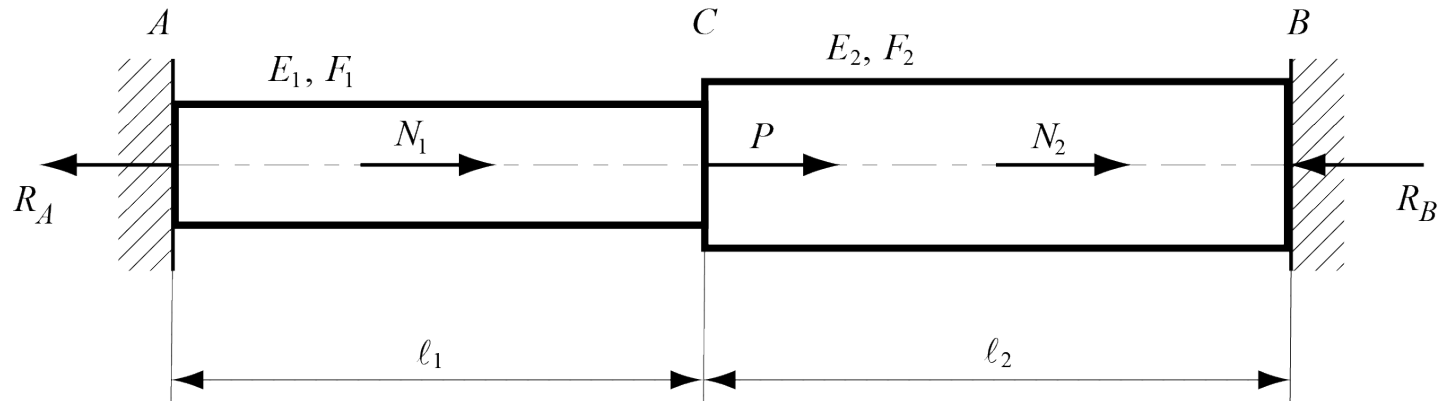
$$h = 15 \text{ m}$$

Problème 2.5



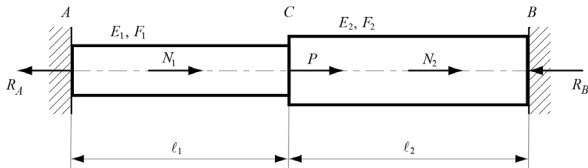
Problème 2.3

Une force P est appliquée au point C du système représenté. Calculer les efforts intérieurs N_1 et N_2 dans les barres, les réactions en A et B , ainsi que le déplacement δ_C

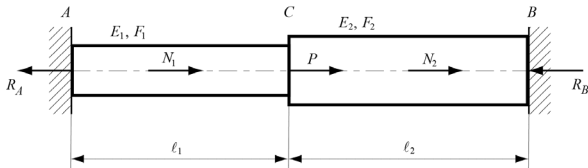


NOTE

Problème 2.3

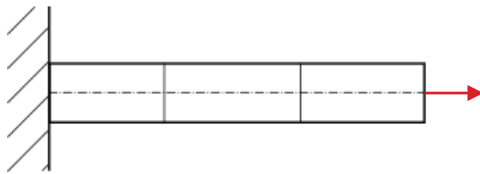


Problème 2.3

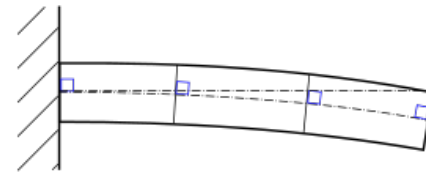


Annexe : Hypothèse de Bernoulli

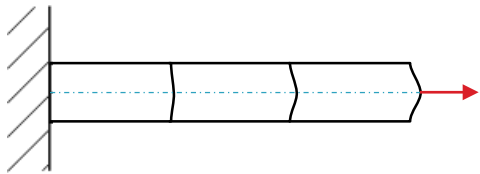
L'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI est une hypothèse cinématique. Les sections planes et normales à la fibre moyenne avant la déformation restent planes et normales à la fibre moyenne après la déformation. Le déplacement d'une section droite est un déplacement de corps solide



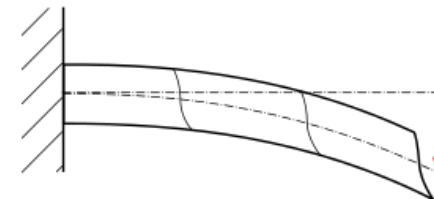
Section droite après déformation



Pas de gauchissement des sections



Section non plane après déformation
(proche du point d'application de la charge)



Gauchissement des sections
(grande déformation)

